ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Σάββατο 8 Ιουνίου 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) ΕΠΑ.Λ.

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ. 28 σχολικό βιβλίο
Α2. Ορισμοί σελ. 59 σχολικό βιβλίο
Α3. α→Λάθος
β→Σωστό
γ→Λάθος
δ→Λάθος
ε→Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $CV=\dfrac{s}{\overline{x}} \Leftrightarrow \overline{x}=\dfrac{s}{CV}=\dfrac{\sqrt{s^2}}{CV}=\dfrac{\sqrt{4}}{0,2}=\dfrac{2}{0,2} \Leftrightarrow \overline{x}=10$

Β2. $\overline{x}=\dfrac{11+7+\kappa+13+11+10}{6}=10 \Leftrightarrow \dfrac{52+\kappa}{6}=10 \Leftrightarrow 52+\kappa=60 \Leftrightarrow \kappa=8$

Β3. Οι τιμές σε αύξουσα σειρά: 7, 8, 10, 11, 11, 13
ν=6 (άρτιος) Μεσαίες παρατηρήσεις: $3^η$ →10 και $4^η$ →11

$\delta=\dfrac{10+11}{2}=\dfrac{21}{2}=10,5$

$R=t_{MAX}-t_{MIN}=13-7=6$

Β4. $x_i'=x_i-2$ Άρα: $\overline{x}'=\overline{x}-2$ και $s'=s$

Επομένως: $CV'=\dfrac{s'}{\overline{x}'}=\dfrac{s}{\overline{x}-2}=\dfrac{2}{10-2}=\dfrac{2}{8}=0,25$ ή 25%

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, γιατί CV>10%.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x)=\left(\sqrt{x^2-2x+10}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-2x+10}}\cdot\left(x^2-2x+10\right)'=$

$$=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}}=\frac{2\left(x-1\right)}{2\sqrt{x^2-2x+10}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}\ .$$

Γ2. $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1\ .$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f ’(x)	-	0	+
f(x)	$\searrow$		$\nearrow$
		T.E.	

T.E. → $f(1)=\sqrt{1^2-2\cdot1+10}=\sqrt{9}=3$

Από ορισμό T.E. $f(x)\geq \text{T.E.}\Rightarrow f(x)\geq f(1)\Rightarrow f(x)\geq 3$.

Γ3. Εξίσωση εφαπτομένης: y=λx+β

$$\lambda=f'(5)=\frac{5-1}{\sqrt{5^2-2\cdot5+10}}=\frac{4}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$$

$$y=f(5)=\sqrt{5^2-2\cdot5+10}=\sqrt{25}=5$$

$$y=\lambda x+\beta\Leftrightarrow 5=\frac{4}{5}\cdot5+\beta\Leftrightarrow 5-4=\beta\Leftrightarrow\beta=1$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η: $y=\dfrac{4}{5}\cdot x+1$

Γ4. Σημείο Α (σημείο τομής με τον άξονα x’x) → y = 0

$$y=\frac{4}{5}\cdot x+1\overset{y=0}{\Rightarrow}0=\frac{4}{5}\cdot x+1\Leftrightarrow-\frac{4}{5}\cdot x=1\Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$$

Άρα το σημείο Α είναι το: $A\left(-\dfrac{5}{4},0\right)$

Σημείο Β (σημείο τομής με τον άξονα y’y) → x = 0

$$y=\frac{4}{5}\cdot x+1\overset{x=0}{\Rightarrow}y=\frac{4}{5}\cdot0+1\Leftrightarrow y=1$$

Άρα το σημείο Β είναι το: $B\left(0,1\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για λ = 3, $f(x)=x^3-3x^2+3x$

$$f'(x)=\left(x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+\left(3x\right)'=3x^2-6x+3.$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f ’(x)	+	0	+
f(x)	↗		↗

Οι τιμές $x_1=\dfrac{3}{8}$ και $x_2=\dfrac{5}{6}$, ανήκουν στο διάστημα $\left(-\infty,1\right]$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα $\dfrac{3}{8}<\dfrac{5}{6} \xrightarrow{\text{f γν. αύξουσα}} f\left(\dfrac{3}{8}\right)<f\left(\dfrac{5}{6}\right)$.

Δ2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-6x+3}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x^2-2x+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x^2-x\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x-1\right)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2\right]\cdot x\left(x-1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x-1\right)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(x-1\right)\cdot x\left(x-1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{x}=\frac{3\left(\sqrt{1}+1\right)}{1}=3\cdot 2=6$$

Δ3. Ελάχιστος συντελεστής διεύθυνσης. Άρα μελέτη ως προς τα ακρότατα της παραγώγου της f.

$f'(x)=3x^2-6x+3$ $\qquad$ $\left(f'(x)\right)'=f''(x)=6x-6$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f ’’(x)	-	0	+
f ‘(x)	↘	Τ.Ε.	↗

Για x = 1 ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f γίνεται ελάχιστος.

$y=f(1)=1^3-3\cdot 1^2+3\cdot 1 \Leftrightarrow y=1$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το: (1, 1).

Δ4. Για να μην παρουσιάζει η f ακρότατα θα πρέπει η f ’(x) να μην αλλάζει πρόσημο.

Επειδή η f ‘ (x) είναι δευτεροβάθμια παράσταση, θα πρέπει η εξίσωση $f'(x)=0$ να έχει διακρίνουσα $\Delta \le 0$.

$$f'(x)=3x^2-6x+\lambda=0$$

$$\Delta \le 0 \Leftrightarrow \left(-6\right)^2-4\cdot 3\cdot \lambda \le 0 \Leftrightarrow 36-12\lambda \le 0 \Leftrightarrow \frac{36}{12} \le \lambda \Leftrightarrow \lambda \ge 3$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του λ για να μην έχει ακρότατα η f είναι $\lambda = 3$.