# Απαντήσεις στα Μαθηματικά Προσανατολισμού

## Νέο Σύστημα

## ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 76

Α2. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 104

Α3. α) ΨΕΥΔΗΣ

β) Σχολικό Βιβλίο Σελ. 136

Α4) α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$\cdot\ f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$.

$\Delta_f = (1, +\infty)$.

$\cdot\ g(x) = e^x$. $\quad D_g = \mathbb{R}$

B1. $D_{f\circ g} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x > 1 \}$

$= (0, +\infty)$

$\cdot\ (f\circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{g(x)+2}{g(x)-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (f\circ g)(x) = \dfrac{e^x+2}{e^x-1}$

B2. $(f\circ g)(x) = \dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, $x>0$

Η $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$(f\circ g)'(x) = \left(\frac{e^x+2}{e^x-1}\right)' = \frac{e^x\cdot(e^x-1)-(e^x+2)\cdot e^x}{(e^x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f\circ g)'(x) = \frac{\cancel{e^{2x}}-e^x-\cancel{e^{2x}}-2e^x}{(e^x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f\circ g)'(x) = \frac{-3e^x}{(e^x-1)^2} < 0,\ \forall\, x>0$$

Η $(f\circ g)(x)$ είναι γν. φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ άρα 1-1 άρα υπάρχει η αντίστροφη $(f\circ g)^{-1}(x)$

$$D_{(f\circ g)^{-1}} = (f\circ g)(D_{f\circ g}) = (f\circ g)((0,+\infty)) \overset{f\circ g \downarrow}{=}$$

$$= \left(\lim_{x\to+\infty} f\circ g,\ \lim_{x\to 0^+} f\circ g\right) = (1,+\infty)$$

καθώς $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f\circ g = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+2}{e^x-1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H}{=}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x+2)'}{(e^x-1)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

και για $x>0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x-1>0$

με $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f\circ g = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x+2}{e^x-1} =$

$$= \lim_{x\to 0^+}(e^x+2)\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x-1} = +\infty$$

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης $(f\circ g)^{-1}(x)$

είναι $D_{f\circ g^{-1}} = (1,+\infty)$

Για $x>0$ και $y>1$

θέτουμε $y=(f\circ g)(x) \Leftrightarrow y=\dfrac{e^x+2}{e^x-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y\cdot(e^x-1)=e^x+2 \Leftrightarrow ye^x-y=e^x+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ye^x-e^x=2+y \Leftrightarrow (y-1)e^x=y+2 \Leftrightarrow$

$\underset{y>1}{\overset{y-1\neq 0}{\Leftrightarrow}} e^x=\dfrac{y+2}{y-1} \underset{\frac{y+2}{y-1}>0}{\overset{\cdot\, y>1}{\Leftrightarrow}} x=\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\circ g^{-1}(y)=\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)$, οπότε

$(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$

B3.

$\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$ παραγωγ.

στο $(1, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με $\varphi'(x) = \left[\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)\right]' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)'(x-1) - (x+2)(x-1)'}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-2}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{-3x+3}{(x+2)\cdot(x-1)^2}$$

Για $x > 1 \Leftrightarrow -3x+3 < 0$ και $x+2 > 0$ και

$x-1 > 0$. Έπεται $\varphi'(x) < 0$

Επομένως η $\varphi$ γν. φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

B1.

• Για $x>1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

Θέτουμε $u = \frac{x+2}{x-1}$ με $x>1$

καθώς $x\to 1^+$ το $u\to +\infty$

επομένως $\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) = \lim_{u\to +\infty} \ln(u) = +\infty$

• $\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$.

Θέτουμε $u=\frac{x+2}{x-1}$, με $x>1$

καθώς $x\to +\infty$ είναι $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+2}{x-1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$

$= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$ άρα το $u\to 1$

Οπότε $\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim_{u\to 1} \ln(u) = \ln 1 = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\ln\lambda, & x\le 0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases},\ \lambda>0$$

Γ1. Η $f$ συνεχής στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right)$ άρα συνεχής στο $x_0=0$.

Για $x<0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=$

$= 1-\ln\lambda$ (1)

Για $x>0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=$

$=0+\lambda\cdot 1=\lambda$ (2)

$f(0)=1-\ln\lambda$. Θα πρέπει:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\overset{(1)}{\underset{(2)}{\Leftrightarrow}} 1-\ln\lambda=\lambda\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\lambda+\lambda-1=0,\ \lambda>0$

Θέτουμε $g(\lambda) = \ln\lambda + \lambda - 1$, $\lambda > 0$

Η $g$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα και συνεχής με $g(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$

Προφανής ρίζα $\lambda_0 = 1$

Είναι $g'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 1 > 0$ για $\lambda > 0$

Η $g$ γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα

1-1 άρα $\lambda = 1$ μοναδική.

Τ2. Για $\lambda = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Για $x < 0$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{x}\,1}{\cancel{x}\cdot(1-x)}$$

$$= 1$$

Σελίδα

Για $x>0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{ημx+συνx-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{ημx}{x} + \lim_{x\to 0^+}\frac{συνx-1}{x} = 1+0 = 1$$

Είναι: $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-1} = 1$

Έπεται $f'(0)=1$

$$λ = εφω = f'(0) = 1 \Leftrightarrow εφω = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow εφω = εφ\frac{π}{4} \Leftrightarrow ω = κπ+\frac{π}{4},\ κ\in\mathbb{Z}$$

Άρα $ω = \frac{π}{4}$.

Γ3. Για $x<0$ η $f$ παραγωγίσιμη

με $f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Για $x=0$ $f'(0) = 1$

Για $0<x<\frac{3\pi}{2}$ η $f$ παραγωγίσιμη με

$f'(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

Άρα

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, & 0<x<\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

• Για κάθε εσωτερικό σημείο του $(-\infty, \frac{3\pi}{2})$ ορίζεται η $f'(x)$ άρα αναζητούμε κρίσιμα σημεία όπου $f'(x)=0$

Για $x<0$ είναι $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0$

άρα δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία για $x<0$

Για $x=0$ είναι $f'(0)=1\neq 0$

Για $0<x<\frac{3\pi}{2}$ θέτουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $συνx - ημx = 0 \Leftrightarrow συνx = ημx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ημx = ημ\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ \text{ή} \\ 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2}-x\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \ (\text{Αδύνατη}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \ k\in\mathbb{Z}, \ x\in\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

Είναι

$0 < x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < k\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{\cancel{\pi}}{4} < k\cancel{\pi} < \frac{3\cancel{\pi}}{2} - \frac{\cancel{\pi}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{5}{4} \Leftrightarrow k = 0$ ή $k = 1$

Για $k = 0$ είναι $x_0 = \frac{\pi}{4}$

Για $k = 1$ είναι $x_1 = \frac{5\pi}{4}$

Επομένως τα ακρότατα σημεία είναι

$A\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

άρα $A\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$

και $B\left(\frac{5\pi}{4}, f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{5\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}$

$B\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$

· Για $\alpha \leq 0$

Γ4. Η εφαπτομένη της $C_f$ στο Μ

είναι: (ε) $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$

Η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ αν και

μόνο αν $y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -f(\alpha) = f'(\alpha)(x_B - \alpha) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{1-\cancel{\alpha}} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2} \cdot (x_B - \alpha) \overset{\alpha \neq 1}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow -(1-\alpha) = x_B - \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 + \alpha = x_B - \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_B = 2\alpha - 1$

$B(2\alpha - 1, 0)$

α΄ τρόπος.

$$x_B(t) = 2\alpha(t) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B'(t) = 2\alpha'(t) = 2\cdot\left(-\frac{\alpha(t)}{3}\right) = -\frac{2\alpha(t)}{3}$$

$$\xRightarrow{t=t_0} x_B'(t_0) = -\frac{2\alpha(t_0)}{3} = -\frac{2}{3}(-1) = 2/3$$

β΄ τρόπος

$$\frac{dx_B}{dt} = \frac{dx_B}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt} = 2\cdot\left(-\frac{\alpha(t)}{3}\right) = +\frac{2}{3}$$

**Δ1)**

$$f(x) = e^x + x^2 - e\cdot x - 1$$

$$f'(x) = e^x + 2x - e$$

$$f''(x) = e^x + 2 > 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

- $f''(x) > 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R}$ άρα η $f'$ γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Η $f'$ συνεχής στο $[0,1]$

- $f'(0) = e^0 + 2\cdot 0 - e = 1 - e < 0$
  $f'(1) = e + 2 - e = 2 > 0$
  $\rightarrow f'(0)\cdot f'(1) < 0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλ. $x_0 \in (0,1)$: $f'(x_0) = 0$

Για κάθε $x > x_0 \overset{f' \nearrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Για κάθε $x < x_0 \overset{f' \nearrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

τ.ε

Για καθε $x > x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0)$

Για καθε $x < x_0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0)$

Αρα για καθε $x \in \mathbb{R}$ : $f(x) \geq f(x_0)$

Συνεπώς η $f$ παρουσιάζει στο $x_0$ ολικό ελάχιστο το $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1$

Ομως $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$. (1)

Αρα $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e x_0 - 1 \overset{(1)}{=} e - 2x_0 + x_0^2 - e x_0 - 1 =$

$= x_0^2 - (e+2) \cdot x_0 + e - 1$.

Δ2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=$

$$=\lim_{x\to x_0}\left\{\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+(x-x_0)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]\right\}$$

• Για $x>x_0$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{1}{x-x_0}=+\infty$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0$

Απο Δ1 για $x>x_0$ η $f(x)>0$ σε μια περιοχή κοντά στο $x_0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=+\infty$.

$\rightarrow \quad -1\leq \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\leq 1 \iff$

$\iff -(x-x_0)\leq \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\cdot(x-x_0)\leq x-x_0$

$$\lim_{x\to x_0^+}[-(x-x_0)] = \lim_{x\to x_0^+}(x-x_0)=0$$

Απο κριτήριο παρεμβολης ισχύει οτι:

$$\lim_{x\to x_0^+}\left[(x-x_0)\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=0$$

Συνεπώς:

$$\lim_{x\to x_0^+}\left\{\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+(x-x_0)\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]\right\}=$$

$$=(+\infty)\cdot\left[(+\infty)+0\right]=+\infty.$$

- Για $x<x_0$

$\rightarrow \lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{x-x_0}=-\infty$

$\rightarrow \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0$

Απο Δι για $x<x_0$ η $f'(x)<0$ σε μια περιοχή κοντά στο $x_0$.

Άρα: $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = -\infty$

Ομοίως $\lim\limits_{x \to x_0^-} \left[(x-x_0)\cdot ημ\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right] = 0.$

Άρα: $\lim\limits_{x \to x_0^-} \left\{\dfrac{1}{x-x_0}\left[\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} + (x-x_0)\cdot ημ\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]\right\} =$

$= (-\infty)\left[(-\infty)+0\right] = +\infty.$

Συνεπώς:

$\lim\limits_{x \to x_0} \left\{\dfrac{1}{x-x_0}\left[\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} + (x-x_0)\cdot ημ\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]\right\} = +\infty$

## Δ3)

Θεωρώ συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - x_0$, $x \in [x_0, 1]$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Ισχύει $g(1) = f(1) + 1 - x_0 = 0 + 1 - x_0 > 0$ διότι $x_0 < 1$

και $g(x_0) = f(x_0) + \cancel{x_0} - \cancel{x_0} \overset{\Delta 1}{=}$

$$= x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

Βρίσκω πρόσημο τριωνύμου

$$x^2 - (e+2)x + e - 1 \quad \text{I}$$

$$\Delta = (e+2)^2 - 4(e-1) = e^2 + \cancel{4e} + 4 - \cancel{4e} + 4$$
$$= e^2 + 8$$

Τότε $x_{1,2} = \dfrac{e+2 \pm \sqrt{e^2+8}}{2}$

Με $x_2 = \dfrac{e+2+\sqrt{e^2+8}}{2} > 1$

και $x_1 = \dfrac{e+2-\sqrt{e^2+8}}{2} \in (0,1)$

διότι $e+2-\sqrt{e^2+8} > 0 \iff$

$e+2 > \sqrt{e^2+8} \iff$

$(e+2)^2 > \sqrt{e^2+8}^{\,2} \iff$

$\cancel{e^2}+4e+4 > \cancel{e^2}+8 \iff$

$4e > 4 \iff$

$e > 1$ ισχύει

και $\frac{e+2-\sqrt{e^2+8}}{2} < 1 \Leftrightarrow$

$$e+\cancel{2}-\sqrt{e^2+8} < \cancel{2} \Leftrightarrow$$

$$e^2 < \sqrt{e^2+8}^{\,2} \Leftrightarrow$$

$$e^2 < e^2+8 \Leftrightarrow$$

$0 < 8$ ισχύει

Οπότε

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $x_1$ | $1$ | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-(e+2)x+e-1$ | + | + | 0 − | − | 0 | + |

Οπότε για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ το τριώνυμο (I) είναι αρνητικό, και αφού $(x_1, 1) \subseteq (x_1, x_2)$, θα ισχύει

$$g(x_0) < 0$$

Οπότε $g(1) \cdot g(x_0) < 0$, άρα

απο Θ. Bolzano υπάρχει τουλαχι-

στον ένα $\rho \in (x_0, 1)$ τέτοιο

ώστε $g(\rho) = 0$

Ομως $g'(x) = f'(x) + 1 > 0$ για

καθε $x \in (x_0, 1)$ απο Δ1. οποτε $g(x)$

γνησιως αύξουσα στο $(x_0, 1)$

άρα και 1-1

οπότε η ρίζα μοναδική.