Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού,**

Θετικών & Οικονομικών Σπουδών (με το ΝΕΟ Σύστημα)

Ημερομηνία: **18 Μαΐου 2016**

Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

Α1. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **262 (i)**

Α2. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **141**

Α3. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **246-247**

Α4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Σωστό

Θέμα Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)' = \ \dots\ = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \ \Leftrightarrow x = 0$

Λύνουμε την ανίσωση $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \ \Leftrightarrow x > 0$

Αντίστοιχα: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \ \Leftrightarrow x < 0$

Το πρόσημο της πρώτης παραγώγου και η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	↘	Ολικό Ελάχιστο	↗

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$.

Β2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)' = \ldots = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$

Λύνουμε την εξίσωση $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow -6x^2+2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Λύνουμε την ανίσωση $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3} > 0 \Leftrightarrow -6x^2+2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$

Το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

Η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

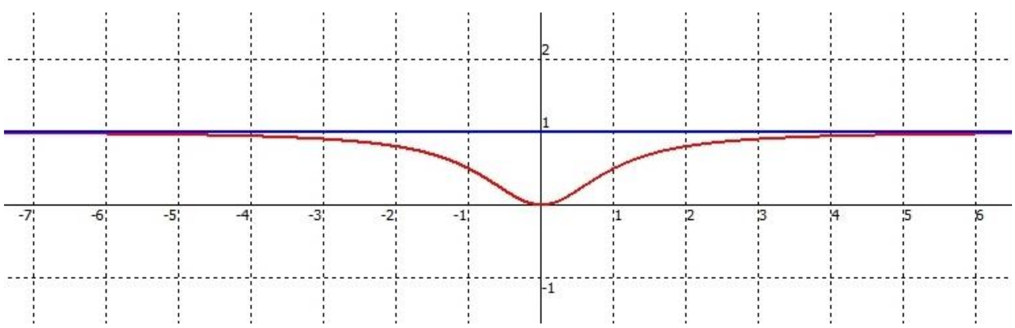
Η f παρουσιάζει σημεία καμπής $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ με $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ και

$B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ αφού η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτών και ορίζεται εφαπτομένη στα σημεία αυτά.

Β3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών και δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
Βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ και ομοίως προκύπτει $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

Συνεπώς η γραφική παράσταση της f έχει στο $+\infty$ και στο $-\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$.

Β4.



Θέμα Γ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει προφανή ρίζα τη $x = 0$, αφού $f(0) = e^0 - 1 = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x(e^{x^2} - 1)$.

Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\left(e^{x^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $e^{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

και κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	
$e^{x^2} - 1$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Για $x = 0$ η f έχει ολικό ελάχιστο το $y = f(0) = 0$.

Επομένως για $x < 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$,

και για $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ και λόγω του ερωτήματος **Γ1** η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

Επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0\,, +\infty)$.

Έχουμε: $f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2$

$$\sqrt{f^2(x)} = \sqrt{\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2}$$

$$|f(x)| = \left|e^{x^2} - x^2 - 1\right|$$

Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ ισχύει είτε $f(x) < 0$ οπότε: $f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)$

είτε $f(x) > 0$ οπότε: $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$.

Αντίστοιχα στο διάστημα $(0, +\infty)$ ισχύει είτε $f(x) < 0$ οπότε: $f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)$

είτε $f(x) > 0$ οπότε: $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω περιπτώσεις, όλες οι συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη είναι οι εξής:

$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1\,, x \in \mathbb{R}$

ή $\quad f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right), x \in \mathbb{R}$

ή $\quad f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1\,, & \text{αν } x \geq 0 \\ -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right), & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

ή $\quad f(x) = \begin{cases} -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right), & \text{αν } x \geq 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1\,, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

Γ3. Η f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x) = 2x\left(e^{x^2} - 1\right)$

$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2\, e^{x^2} - 2, \qquad x \in \mathbb{R}$

και $f'''(x) = \left(2e^{x^2} + 4x^2\, e^{x^2} - 2\right)' = \cdots = 4x\, e^{x^2}(2x^2 + 3),\ x \in \mathbb{R}$

Λύνω την εξίσωση: $f'''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x\, e^{x^2}(2x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

και αντίστοιχα την ανίσωση:

$f'''(x) > 0 \Leftrightarrow 4x\, e^{x^2}(2x^2 + 3) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμων

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'''	$-$	0	$+$
f''	↘		↗

Επειδή η f'' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, προκύπτει ότι:

$f''(x) > 0$, για κάθε $x < 0$

Επειδή η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, προκύπτει ότι:

$f''(x) > 0$, για κάθε $x > 0$

Επίσης είναι: $f''(0) = 0$.

Επομένως, $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Διαφορετικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:
$f''(x) = 2\left(e^{x^2} - 1\right) + 4x^2\, e^{x^2} \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, αφού ισχύει: $e^{x^2} - 1 \geq 0$ και $4x^2\, e^{x^2} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει σε κάθε περίπτωση μόνο για $x = 0$. Άρα, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = f(x+3) - f(x), x \in [0, +\infty)$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $g'(x) = f'(x+3) - f'(x)$.

Από το ερώτημα Γ3, f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x > 0$ έχουμε: $x < x + 3 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x+3)$, αφού f' γνησίως αύξουσα

Άρα: $g'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$. Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα έχει την ιδιότητα 1-1.

Επίσης, $|\eta\mu x| + 3 > 0$ και συνεπώς ορίζεται η σύνθεση $g(|\eta\mu x| + 3)$ στο $[0, +\infty)$ και η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x) \quad (1)$$

ισοδύναμα γράφεται:

$$g(|\eta\mu x|) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow |\eta\mu x| = x$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = 0}$$

αφού γνωρίζουμε ότι για $x \geq 0$ ισχύει:
$|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow |\eta\mu x| \leq x$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

Θέμα Δ

Δ1. Ισχύει ισοδύναμα:

$$\int_0^\pi \big(f(x)+f''(x)\big)\ \eta\mu x\ dx=\pi$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\cdot \eta\mu x\ dx+\int_0^\pi \big(f'(x)\big)'\ \eta\mu x\ dx=\pi$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\cdot \eta\mu x\ dx+[f'(x)\cdot \eta\mu x]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x\ dx=\pi$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\cdot \eta\mu x\ dx+0-[f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x]_0^\pi-\int_0^\pi f(x)\cdot \eta\mu x\ dx=\pi$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{f(\pi)+f(0)=\pi\ \ (1)}$$

Για τη συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)}{\eta\mu x}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$

Είναι: $f(x)=\eta\mu x\cdot h(x)$ κοντά στο $x=0$, οπότε: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$ αφού η f είναι συνεχής στο $x=0$.

Τελικά η (1) γίνεται: $f(\pi)=\pi$.

Επιπλέον έχουμε:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{\eta\mu x}}{\frac{x}{\eta\mu x}}=1$$

2ος τρόπος

Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}\ \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\ \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\ =\ f'(0)=1$$

Δ2.

α) Υποθέτουμε ότι η f παρουσιάζει ένα τουλάχιστον τοπικό ακρότατο στη θέση $x\in\mathbb{R}$. Επειδή είναι παραγωγίσιμη στο x_0, από το Θεώρημα Fermat ισχύει $f'(x_0)=0$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) ισχύει:

$e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)+e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=x_0$ δίνει: $e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+1=f'\big(f(x_0)\big)\cdot f'(x_0)+e^{x_0}$

$\Leftrightarrow e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$, χρησιμοποιώντας ότι: $f'(x_0) = 0$

Δηλαδή $f'(0) = 0$. **Άτοπο**

Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

β) Ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άρα η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$,

Δηλαδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $f'(0) = 1 > 0$ ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\left|\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| = \frac{|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \frac{|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \frac{2}{|f(x)|}$$

Δηλαδή:

$$-\frac{2}{|f(x)|} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{|f(x)|} \quad (1)$$

Επειδή: $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και συνεχής ισχύει:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ οπότε: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Από τη σχέση (1) και με χρήση του κριτηρίου παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$$

Δ4.

Είναι:

$$\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}\, dx \quad (2)$$

Θέτουμε: $u = \ln x$ επομένως: $du = \frac{1}{x}\, dx$ και για τα άκρα της ολοκλήρωσης παίρνουμε:

- για $x = 1$, $u = 0$
- για $x = e^\pi$, $u = \pi$

$$(2) = \int_0^\pi f(u)\, du = \int_0^\pi f(x)\, dx$$

Για κάθε: $0 \leq x \leq \pi$ είναι $f(0) \leq f(x) \leq f(\pi)$, αφού $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$

Δηλαδή: $0 \leq f(x) \leq \pi$

Επομένως:

- $f(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$

  $\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\ dx > 0\ \ (3)$

- και ακόμη: $\pi - f(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$

  $\Leftrightarrow \int_0^{\pi} \left(\pi - f(x)\right)\ dx > 0$

  $\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\ dx < \int_0^{\pi} \pi\ dx$

  $\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\ dx < [\pi x]_0^{\pi}$

  $\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\ dx < \pi^2\ \ \ (4)$

Άρα από τις (3) και (4) παίρνουμε: $0 < \int_0^{\pi} f(x)\ dx < \pi^2$

Επιμέλεια:
Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Χρήστος Αναστασίου, Μάριος Παπαδιαμαντής, Αλέξανδρος Φιτσόπουλος, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Κωνσταντίνα Μωραΐτη, Δημήτρης Κότσιρας, Ηρώ Μαρκάκη