ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:	*09/ 06 /207*
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:	***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π***

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θεμα Α

Α1. Σχ. Βιβλίο σελ. 135

Α2. α. → Λ

β. Εστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ αλλα δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό αφού:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

Ενω $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1$$

Παρατηρούμε δηλαδή οτι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

Α3. Σχ. βιβλίο σελ. 73

Α4.

α → Λ

β → Σ

γ → Λ

δ → Σ

ε → Σ

Θέμα Β

$f(x)=\ln x \qquad A=(0,+\infty)$

$g(x)=\dfrac{x}{1-x} \qquad B=\mathbb{R}-\{1\}$

B1 $\Gamma=\left\{\begin{array}{l} x\in B \\ g(x)\in A \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l} x\neq 1. \\ \dfrac{x}{1-x}>0 \end{array}\right\}=$

$=\left\{\begin{array}{l} x\neq 1 \\ x(1-x)>0 \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l} x\neq 1 \\ x\in(0,1) \end{array}\right\}=(0,1)$

$f(g(x))=\ln(g(x))=\ln\dfrac{x}{1-x}$ με $x\in(0,1)$

B2 Η h είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επομένως

$h'(x)=\left[\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)\right]'=\dfrac{1}{\dfrac{x}{1-x}}\cdot\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=$

$$= \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x(1-x)} > 0$$

Άρα η h είναι γν. αύξουσα στο $(0,1)$

επομένως και 1-1 άρα ορίζεται η

αντίστροφη..

Θέτουμε $h(x)=y \Leftrightarrow$

$$\ln\frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow$$

$$x = e^y(1-x) \Leftrightarrow e^y - x e^y = x \Leftrightarrow$$

$$x + e^y \cdot x = e^y \Leftrightarrow x(e^y+1) = e^y \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{e^y}{e^y+1}, \; y \in \mathbb{R}.$$

$$x \in (0,1) \Leftrightarrow 0 < \frac{e^y}{e^y+1} < 1 \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}.$$

Επομένως έχουμε $h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$

$\underline{B_3}$ $\varphi(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

$$\varphi'(x)=\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)'=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=$$

$$=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

Επομένως η φ είναι γν. αύξουσα

άρα <u>δεν</u> έχει ακρότατα

$$\varphi''(x)=\left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)'=\frac{e^x\cdot(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4}=$$

$$=\frac{(e^x+1)\cdot e^x\left[e^x+1-2e^x\right]}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

$$\varphi''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}=0 \Leftrightarrow 1-e^x=0 \Leftrightarrow$$

$1-e^x=0 \Leftrightarrow e^x=e^0 \Leftrightarrow x=0$

$\varphi''(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^x(1-e^x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-e^x\geq 0 \Leftrightarrow$

$e^x\leq e^0 \overset{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} x\leq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
φ	$\cup$		$\cap$

Η φ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και

η φ 〃 κοίλη στο $[0,+\infty)$

Η φ εμφανίζει σημείο καμπής στο $x_0=0$

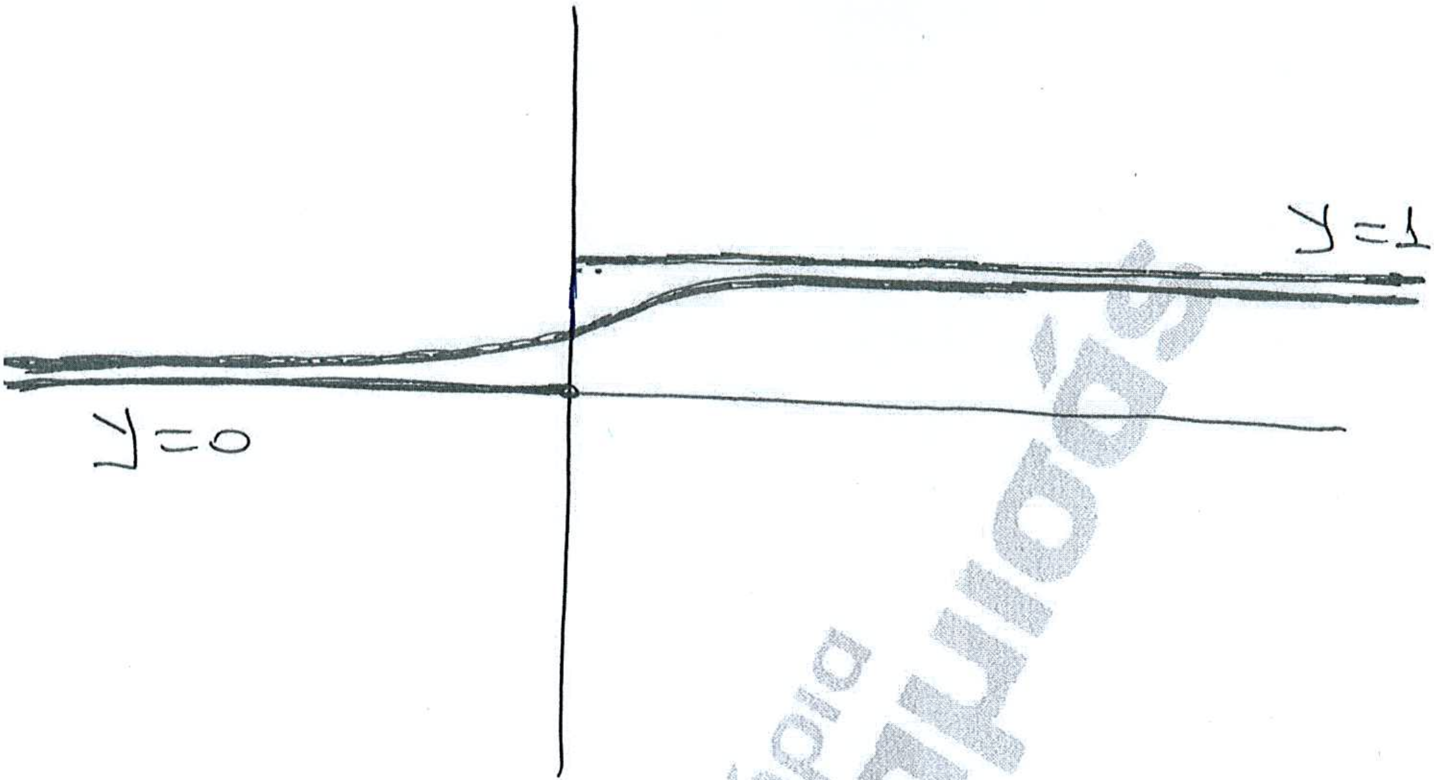
το $(0,\varphi(0))=(0,1/2)$

$\boxed{B_4}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$

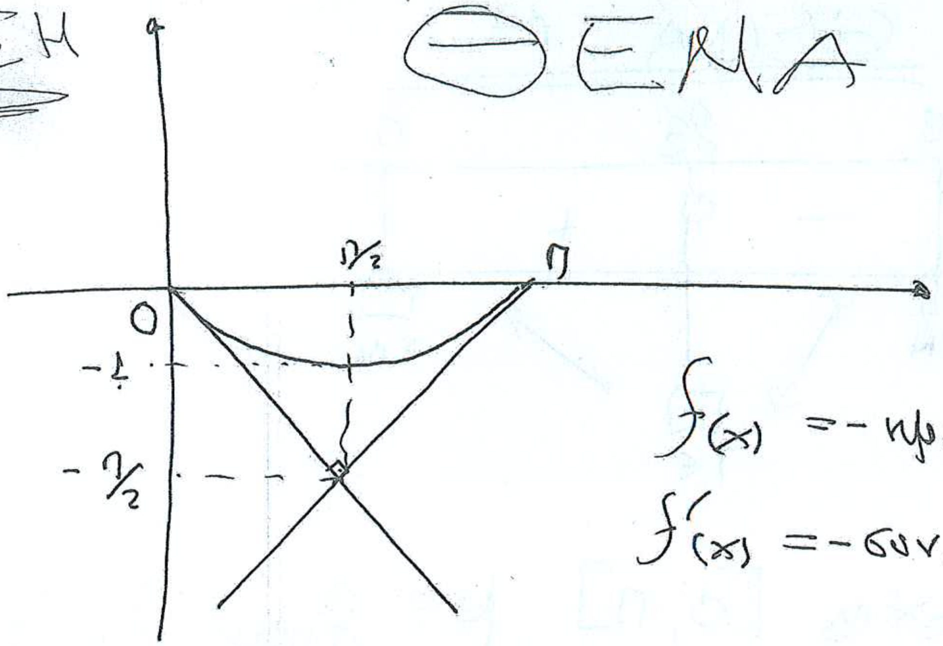
$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{1}=0.$

Επομένως οριζόντιες ασύμπτωτες είναι

η $y=0$ στο $-\infty$ και η $y=1$ στο $+\infty$


y=1
y=0

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑ Γ



$f(x) = -ημx, \ [0,π]$

$f'(x) = -συνx, \ [0,π]$

$\boxed{1}$ Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f στο οποίο δέχεται εφαπτομένη που διέρχεται από $A(\frac{π}{2}, -\frac{π}{2})$

Εξίσωση εφαπτομένης: $(ε)\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Longrightarrow$

$$(ε)\ y + ημx_0 = -συνx_0 \cdot (x - x_0)$$

$A(\frac{π}{2}, -\frac{π}{2}) \in (ε)$: $-\frac{π}{2} + ημx_0 = -συνx_0 \left(\frac{π}{2} - x_0\right) \Longleftrightarrow$

$$-\frac{π}{2} + ημx_0 = -\frac{π}{2}συνx_0 + x_0 συνx_0 \Longleftrightarrow$$

$$συνx_0 \left(\frac{π}{2} - x_0\right) + ημx_0 - \frac{π}{2} = 0$$

Θεωρώ $g(x) = συνx \cdot \left(\frac{π}{2} - x\right) + ημx - \frac{π}{2}$

Είναι $g(0) = 0$ κ $g(π) = 0$

$$g'(x) = -ημx\left(\frac{π}{2} - x\right) - \cancel{συνx} + \cancel{συνx}$$

Για $x \in (0, \frac{π}{2})$ είναι $g'(x) < 0$

Για $x \in (\frac{π}{2}, π)$ είναι $g'(x) > 0$

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑ Γ

x	0		$\pi/2$		π
g'		$-$	0	$+$	
g	ΤΜ	$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$	ΤΜ

g συνεχής $[0,\pi]$ με $g_{max} = g(0) = g(\pi) = 0$

Άρα μοναδικές λύσεις $x=0$ κ $x=\pi$

Εξισώσεις εφαπτομένων:

$(\varepsilon_1)\ y = -x \qquad (\varepsilon_2)\ y = x - \pi$

$\boxed{2}$ Τομή $\varepsilon_1, \varepsilon_2$: $A\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = \eta\mu x > 0$ για $x \in (0,\pi)$ οπότε f κυρτή $[0,\pi]$ επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από τις ε_1, ε_2 με εξαίρεση τα σημεία επαφής αντίστοιχα

Άρα $f(x) \geq -x \Leftrightarrow f(x) + x \geq 0$
κ $f(x) \geq x - \pi \Leftrightarrow f(x) - x + \pi \geq 0$ για $x \in [0,\pi]$

$$E_1 = \int_0^{\pi/2} (f(x) + x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (f(x) - x + \pi)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-\eta\mu x + x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\eta\mu x - x + \pi)\,dx$$

$$= \left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} + \left[\sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= 0 + \frac{\pi^2}{8} - 1 + (-1) - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - 0 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$E_2 = \int_0^{\pi} -f(x)\,dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x\,dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

Είναι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\frac{\pi^2 - 8}{4}}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$

3

$\boxed{3}$

$$\lim_{x\to n} \frac{f(x)+x}{f(x)-x+n} = \lim_{x\to n}\left[\frac{1}{f(x)-x+n}\,(f(x)+x)\right] = +\infty$$

διότι $\lim_{x\to n}(f(x)+x) = n$

και $f(x)-x+n > 0$ για $x\in(0,n)$

$\lim_{x\to n}(f(x)-x+n) = 0$ οπότε

$$\lim_{x\to n}\frac{1}{f(x)-x+n} = +\infty$$

$\boxed{4}$ Είναι $f(x) > x-n$, $x\in[1,e]$

από Γ_2 (το ίσον ισχύει μόνο για $x=n>e$)

οπότε $\frac{f(x)}{x} > 1-\frac{n}{x}$, $x\in[1,e]$

και $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e \left(1-\frac{n}{x}\right)dx \Longrightarrow$

$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > [x-n\ln x]_1^e = e-n-(1-0) \Longrightarrow$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e-n-1$$

4

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΘΕΜΑ Δ

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Δ1. $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ f συνεχής στο $[-1,0)$ ως σύνθεση συνεχών

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4}=0 \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x ημx)=e^0\cdot 0=1\cdot 0=0\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } x_0=0$$

$f(x)=e^x ημx$ συνεχής στο $(0,π]$ ως γινόμενο συνεχών

Επομένως η f είναι συνεχής στο $[-1,π]$

$x\in[-1,0)$ $\quad f'(x)=\frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}(-x)'=-\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}$

$x\in(0,π]$ $\quad f'(x)=(e^x)'ημx+e^x(ημx)'=e^xημx+e^xσυνx=e^x(ημx+συνx)$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|^{4/3}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{4/3}}{x}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{4/3}}{-x}=-\lim_{x\to 0^-}(-x)^{\frac{1}{3}}=0$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^xημx}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x\frac{ημx}{x}\right)=e^0\cdot 1=1$$

Επομένως δεν υπάρχει το $f'(0)$

Συνεπώς $f'(x)=\begin{cases} -\frac{4}{3}(-x)^{1/3}, & x\in[-1,0) \\ e^x(-ημx+συνx), & x\in(0,\pi] \end{cases}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x(ημx+συνx)=0 \Leftrightarrow ημx=-συνx \Leftrightarrow 1=-εφx \Leftrightarrow εφx=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow εφx=εφ(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow x=κπ-\frac{\pi}{4} \overset{x\in(0,\pi]}{\underset{κ=1}{\Leftrightarrow}} x=\frac{3\pi}{4}$

Άρα κρίσιμα σημεία τα $x_0=0$ (δεν υπάρχει η $f'(x)$) και $x=\frac{3\pi}{4}$

Δ2. $f'(x)=-\frac{4}{3}(-x)^{1/3}<0, \forall x\in(-1,0) \Rightarrow f \downarrow [-1,0)$

$x\in(0,\pi)$: $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x(ημx+συνx)>0 \Leftrightarrow ημx+συνx>0 \Leftrightarrow 1>-εφx \Leftrightarrow εφx>-1$

$\Leftrightarrow εφx>εφ(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow x<-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x<\frac{3\pi}{4}$

x	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)=-\frac{4}{3}(-x)^{1/3}$		$-$		//		//	
$f'(x)=e^x(ημx+συνx)$		//		$+$		$-$	
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0

$f([-1,\pi])=[0, e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}]$