**Προτεινόμενες Απαντήσεις (Θέμα Α και Θέμα Β)**

**Μαθηματικά Προσανατολισμού**

**9-6-2017**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Απόδειξη σελίδα 253 σχολικού

**Α2.** α. Ψευδές

β. Αντιπαράδειγμα η $f(x)=|x|$ σελ. σχολικού 217.

**Α3.** Σελίδα 191 σχολικού.

**Α2.** α. Λ

β. Σ

γ. Λ

δ. Σ

ε. Σ

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** Για τις $f(x)=\ln x,\ x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x},\ x\neq 1$, είναι

$$D_{fog}=\{x\in D_g\ |g(x)\in D_f\}$$

- $x\neq 1$
- $\dfrac{x}{1-x}>0 \Leftrightarrow x(1-x)>0 \Leftrightarrow x\in(0,1)$

Οπότε $x\in(0,1)$

Επομένως $D_{fog}=(0,1)$

Έτσι $(fog)(x)=f(g(x))=\ln\dfrac{x}{1-x}$ , $x\in(0,1)$.

**Β2.** Η h είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $(0,1)$ με

$$h'(x)=(\ln x-\ln(1-x))'=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}>0$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x-\ln(1-x))=-\infty$,

$$\lim_{x\to 1^-} h(x)=\lim_{x\to 1^-}(\ln x-\ln(1-x))=\lim_{x\to 1^-}\ln x-\lim_{x\to 1^-}\ln(1-x)=0-\lim_{x\to 1^-}\ln(1-x)\overset{u=1-x}{=}\lim_{u\to o^+}\ln u=-\infty$$

$$h((0,1))=\left(\lim_{x\to 0^+}h(x),\lim_{x\to 1^-}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}.$$

Οπότε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι $D_{h_{-1}}=\mathbb{R}$

$$h(x)=y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)=y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x}=e^y \Leftrightarrow x=e^y-xe^y \Leftrightarrow x+xe^y=e^y$$

$$\Leftrightarrow \left(e^y+1\right)x=e^y \Leftrightarrow x=\frac{e^y}{e^y+1}$$

Οπότε $h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ , $x\in\mathbb{R}$.

**Β3.** $\varphi(x)=\dfrac{e^x+1-1}{e^x+1}=1-\dfrac{1}{e^x+1}$

$\varphi'(x)=\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0$ **,** άρα $\varphi$ είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα.

$$\varphi''(x)=\frac{-e^{2x}+e^x}{\left(e^x+1\right)^3}=\frac{-e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$$

$$\varphi''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^3}=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$$

Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

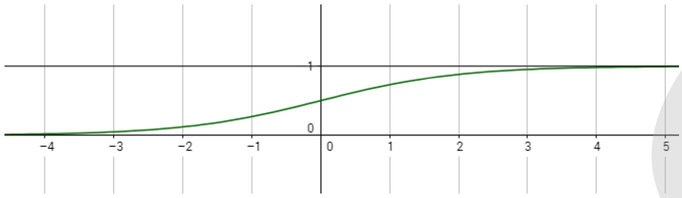
| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi''(x)$ | + | 0 | - |
| $\varphi(x)$ | | Σ.Κ. | |

Είναι $\varphi(0)=\dfrac{1}{2}$

Άρα η $\varphi$ είναι κυρτή στο $\left(-\infty,0\right]$ κοίλη στο $\left[0,+\infty\right)$ και έχει σημείο καμπής το $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

**Β4.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=1$ . Άρα η y=1 οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ .

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=0$ . Άρα η y=0 οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ .


1
0
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5